L'objectif de ce document est de montrer la relation de Taylor avec reste intégral.

Soit f une fonction continûment dérivable sur un intervalle I. Autrement dit, une fonction dérivable sur I et dont la dérivée est continue sur I. Ce que l'on peut encore résumer en disant que f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

Le théorème fondamental de l'intégration permet d'écrire que :

$\int_a^x f'(t)\mathrm{dt} = f(x) - f(a)$

Ainsi $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{dt}$

$f(a)$ est le polynôme de Taylor de f, au point a, d'ordre 0.

$\int_a^x f'(t)\mathrm{dt}$ est le reste de Taylor.

Poursuivons. On peut aussi écrire que $f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \times f'(t)\mathrm{dt}$. Comme souvent en mathématique certaines évidences ou transformations triviales conduisent à des propriétés très intéressantes. La multiplication de f' par 1 ne modifie en aucun cas nos calculs par contre elle ouvre une porte vers d'autres développements.

Notons u et v les fonctions telles que u'=1 (c'est à dire la fonction constante 1) et $v = f'$.

Appliquons une intégration par partie sur $\int_a^x 1 \times f'(t)\mathrm{dt}$.

En utilisant u et v, $f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \times f'(t)\mathrm{dt}$ s"écrit : $f(x) = f(a) + \int_a^x u'(t) \times v(t)\mathrm{dt}$

En supposant v continûment dérivable, c'est à dire, f 2 fois continûment dérivable, autrement dit, f est $\mathcal{C}^2$.

Puisque $(u \times v)' = u'\,v + u \times v'$ ou encore $u' \times v = (u \times v)' - u \times v'$

On a, $f(x) = f(a) + \int_a^x (u \times v)'(t)\mathrm{dt} - \int_a^x u(t) \times v'(t)\mathrm{dt}$

Ainsi, $f(x) = f(a) + [(u \times v)(t)]_a^x - \int_a^x u(t) \times v'(t)\mathrm{dt}$.

Il reste à choisir judicieusement la fonction u. Nous avons l'embarras du choix puisque les primitives sont définies à une constante près. Nous pouvons prendre u telle que $u(t) = t$ ou $u(t) = t + 1$ ou $u(t) = t - 3$, … , dans tous les cas $u'(t) = 1$. Mais ici il est plus judicieux de prendre $u(t) = t - x$.

$f(x) = f(a) + [(t - x)\, f'(t)]_a^x - \int_a^x (t - x) \times f''(t)\mathrm{dt}$

$f(x) = f(a) - (a - x)\, f'(a) - \int_a^x (t - x) \times f''(t)\mathrm{dt}$

ou encore $f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \int_a^x (x - t) \times f''(t)\mathrm{dt}$.

$f(a) + (x - a) f'(a)$ est le polynôme de Taylor de f, au point a, d'ordre 1.

$\int_a^x (x - t) \times f''(t)\mathrm{dt}$ est le reste de Taylor.

Reproduisons notre raisonnement avec notre nouvelle expression :

$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \int_a^x (x - t) \times f''(t)\mathrm{dt}$

En supposant que f'' est continûment dérivable, autrement dit que f est $\mathcal{C}^3$.

Puis en définissant u et v comme les fonctions telles que $u'(t) = x - t$ et $v = f''$.

$f(x) = f(a) + (x - a)\, f'(a) + \int_a^x u'(t) \times v(t)\mathrm{dt}$

L'intégration par partie donne :

$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \int_a^x (u \times v)'(t)\mathrm{dt} - \int_a^x u(t) \times v'(t)\mathrm{dt}$

$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \left[-\frac{(x-t)^2}{2} \times f''(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^2}{2} \times f'''(t)\mathrm{dt}.$

$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} \times f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} \times f'''(t)\mathrm{dt}$

$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} \times f''(a)$ est le polynôme de Taylor de f, au point a, d'ordre 2.

$\int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} \times f'''(t)\mathrm{dt}$ est le reste de Taylor.

Pour tout $m \geqslant 1$, notons P_m la relation $f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + \int_a^x \frac{(x-t)^{(m-1)}}{(m-1)!} f^{(m)}(t)\mathrm{dt}$

Les calculs précédents montrent que cette propriété est vraie pour $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$.

Supposons que $\forall p, 1 \leqslant m \leqslant n$, pour toute fonction m fois continûment dérivable, c'est à dire $f \in \mathcal{C}^m$.

la propriété P_m soit vraie.

Supposons de plus que f soit $n+1$ fois continûment dérivable, c'est dire $f^{(n)}$ dérivable et de dérivée continue. $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(n-1)}(t) + \int_a^x \frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} \times f^{(n)}(t)\mathrm{dt}$

En notant u et v les applications définies par $u'(t) = \frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}$ et $v(t) = f^{(n)}(t)$.

$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + \int_a^x u'(t) \times v(t)\mathrm{dt}.$

L'intégration par partie donne $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + [u(t) \times v(t)]_a^x - \int_a^x u(t) \times v'(t)\mathrm{dt}.$

C'est à dire : $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + \left[\frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t)\mathrm{dt}.$

$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + \frac{(x-a)^n}{n!} \times f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t)\mathrm{dt}$

En intégrant le terme $\frac{(x-a)^n}{n!} \times f^{(n)}(a)$ à la somme nous obtenons :

$f(x) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \times f^{(p+1)}(t)\mathrm{dt}$ c'est à dire P_{n+1} vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \geqslant 1$, pour toute fonction n fois continûment dérivable, c'est à dire $f \in \mathcal{C}^n$.

$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(t) + \int_a^x \frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\mathrm{dt}.$